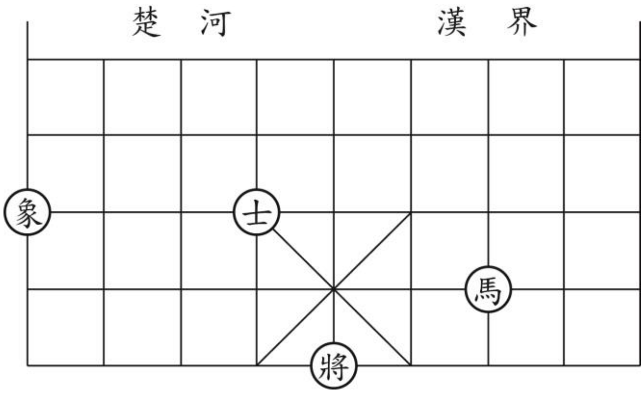
44 寸步難行…在棋盤上趴趴走

台灣較正式的高中數學競賽是 1981 年由台大數學系舉辦的文復會高中數學競試，每年一次，前後十幾年。接著“教育部”80 年度開始辦理全台灣高中數學競賽。讀高中時，曾代表學校參加過文復會的比賽，現在回想起來，會做的題目都忘了，只記得一道做不出來的馬步問題，詳細的題目也記不得了。

玩過象棋的人都知道：馬跳日步，象跨田步，而士只能在田區裡晃來晃去。在棋盤上，日步比田步小，所以馬的行動靈活許多，象則相對笨拙。這也反應出，馬可以遊走的點比象多了許多。當棋盤不是很大，棋子移動受到比較大的限制時，想要在棋盤內遊走，必須有很靈活的移法與竅門。



對於像馬這樣歪來拐去的移動方式，除非我們可以找到「既能表示距離，又可傳達方向的數學工具」，否則想要駕馭牠是很困難的。現在就讓我們來練習一道這樣的遊戲，順便理解其中所牽涉到的數學。

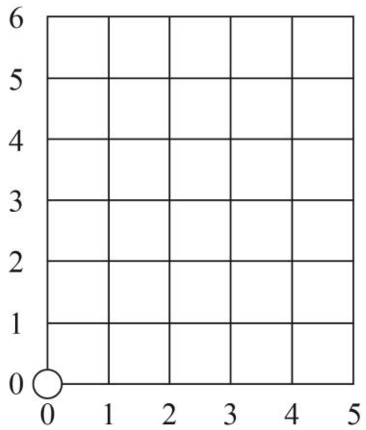
在5×6 *的棋盤上，棋子放置在原點，每次只能根據下列四種規則移動棋子：*

(1) *向右移動* 3 *格，再往上移動* 4 *格。*

(2) *向左移動* 3 *格，再往下移動* 4 *格。*

(3) *向右移動* 2 *格，再往上移動* 3 *格。*

(4) *向左移動* 2 *格，再往下移動* 3 *格。*



在不跑出棋盤限制範圍的情形下：

(1) *是否可以將棋子移動到坐標為*(3,2)*的點？*

(2) *是否可以將棋子移動到坐標為*(2,4)*的點？*

「既能表示距離，又可傳達方向」的數學工具想到了嗎？向量就是工具之一。想想看，物理學上的力不僅有大小，而且也有方向，所以力經常用向量來表示。當拔河比賽雙方處於勢均力敵狀態時，代表兩方力的大小相當，但方向卻相反。也就是說，兩隊所出力的向量和為零的意思。現在就讓我們以向量的方法解決這道移動遊戲。

如果我們將5×6的棋盤坐標化，把棋子所在的點當原點(0,0)，那麼根據平面向量的意涵，「向右移動 3 格，再往上移動 4 格」就是移動向量(3,4)的意思，「向左移動 3 格，再往下移動 4 格」就是移動向量$(-3,-4)=-(3,4)$的意思。同理，另外兩種移動就相當於移動向量(2, 3)與$-(2,3)$的意思。如果我們將移動a_1步向量(3, 4)，a_2步向量$-(3,4)$，b_1步向量(2, 3)與b_2步向量$-(2,3)$可以到達坐標(3, 2)，那麼根據向量的運算，得

$$\begin{aligned}(3,2)&=a_1(3,4)-a_2(3,4)+b_1(2,3)-b_2(2,3)\\&=(a_1-a_2)(3,4)+(b_1-b_2)(2,3).\end{aligned}$$

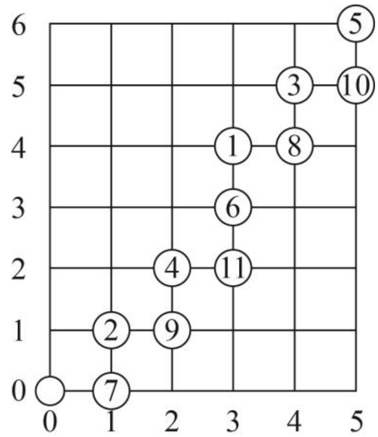
令$a=a_1-a_2, b=b_1-b_2$，整理得二元一次聯立方程組

$$\begin{cases}3a+2b=3;\\4a+3b=2.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=5; \\ b=-6. \end{cases}$$

即 $a_1-a_2=5, b_1-b_2=-6$。顯然 $a_1=5, b_2=6, a_2=b_1=0$ 是一組解，現在考慮這組解是否可以在棋盤上操作，而不讓棋子跑出棋盤外。下圖就是這組解的移動情形，其中①③⑤⑧⑩是移動向量(3,4)，而②④⑥⑦⑨⑪是移動向量 $-(2,3)$：



因此，在不跑出棋盤限制範圍的情形下，我們可以將棋子移動到坐標為(3,2)的點。

接下來仿照前面的向量作法，考慮「是否可以將棋子移動到坐標為(2,4)的點？」由

$$\begin{aligned}(2,4) &= a_1(3,4)-a_2(3,4)+b_1(2,3)-b_2(2,3) \\ &= (a_1-a_2)(3,4)+(b_1-b_2)(2,3)\end{aligned}$$

並令 $a=a_1-a_2, b=b_1-b_2$，整理得二元一次聯立方程組

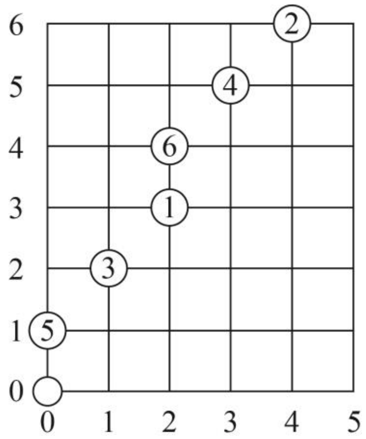
$$\begin{cases} 3a+2b=2; \\ 4a+3b=4. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=-2; \\ b=4. \end{cases}$$

即 $a_1-a_2=-2, b_1-b_2=4$。顯然 $a_2=2, b_1=4, a_1=b_2=0$ 是一組解，現在考慮這組解是否可以在棋盤上操作，而不讓棋子跑出棋盤外。下圖就是這組解的移動情形，

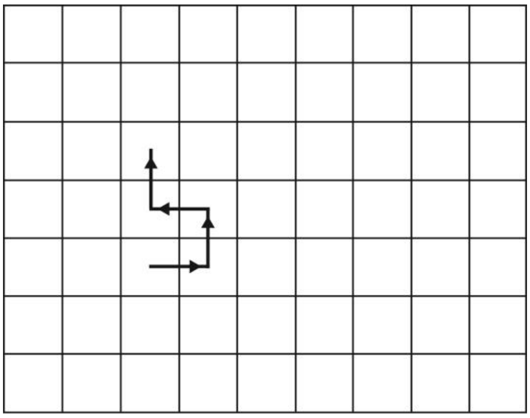
其中③⑤是移動向量 $-(3,4)$，而①②④⑥是移動向量(2,3)：



因此，在不跑出棋盤限制範圍的情形下，我們可以將棋子移動到坐標為(2,4)的點。

不僅在棋盤上可以玩移動遊戲，甚至於在方格上也有移動遊戲，讓我們考慮底下這道成功大學申請入學的問題：

在一個 7×9 的棋盤上任一格出發，可以向上、下、左、右四個方向移動，走遍每一格子之後（每一格子剛好走過一次）再回到原來的格子。



問：這樣的路徑存在嗎？（存在的話舉例，不存在的話需證明）

讓我們再次利用向量解題：將出發點當成原點，此時向右、向左、向上、與向下所對應的向量為(1,0), (-1,0), (0,1)與 $(0,-1)$，並令向右總共走 x_1 步，向左總共走 x_2 步，向上走 y_1 步，向下走 y_2 步。因為最後回到出發點，所以

$$x_1(1,0)+x_2(-1,0)+y_1(0,1)+y_2(0,-1)=(0,0),$$

得到 $x_1-x_2=0, y_1-y_2=0$。又在 7×9 棋盤上，需走 $7\cdot 9=63$ 步才有可能回到出發點，考

慮總步數得到 $x_1+x_2+y_1+y_2=63$，即 $2(x_1+y_1)=63$。這方程式不可能有整數解，故路徑不存在。